PROF.SSA MAIOLINO D.

TEORIA SULLE DERIVATE – SECONDA

CONTINUITA' DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Se una funzione y=f(x) è derivabile in un punto x_0, allora è continua in x_0.

La condizione di continuità di una funzione è condizione necessaria ma non sufficiente per la sua derivabilità.

DERIVATE FONDAMENTALI

y=k	y'=0	y=x	y'=1
$y=x^n$	$y'=n\,x^{n-1}$	$y=x^{-n}$	$y'=-nx^{-n-1}$
$y=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$	$y'=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$		
$y=a^x$	$y'=a^x \ln a$	$y=e^x$	$y'=e^x \ln e=e^x$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}$	$y=\log x$	$y'=\frac{1}{x}$
y=senx	y'=cosx	y=cosx	y'=-senx

TEOREMI SUL CALCOLO DELLE DERIVATE

TEOREMA: Derivata della somma di due funzioni:
la derivata della somma di due funzioni derivabili è uguale alla somma delle derivate delle funzioni stesse: $\boxed{y=f(x)\pm g(x)\Rightarrow y'=Df(x)\pm Dg(x)}$

TEOREMA: Derivata del prodotto di due funzioni:
la derivata del prodotto di due funzioni derivabili è uguale al prodotto della derivata della prima funzione per la seconda non derivata, più il prodotto dalla prima funzione per la derivata della seconda. $\boxed{y=f(x)* g(x)\Rightarrow y'=Df(x)g(x)+f(x)Dg(x)}$
Nel caso sia:
$\boxed{y=k* f(x)\Rightarrow y'=k* Df(x)}$

TEOREMA: Derivata del quoziente di due funzioni:
la derivata del quoziente di due funzioni derivabili (con la funzione divisore diversa da zero nei punti nei quali si calcola la derivata) è uguale ad una frazione che ha per denominatore il quadrato della funzione divisore e per numeratore il prodotto tra la derivata del numeratore ed il divisore meno il prodotto del numeratore per la derivata del denominatore:
$\boxed{y=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}}$ Nel caso sia $\boxed{y=\frac{1}{g(x)}\Rightarrow y'=\frac{-g'(x)}{g^2(x)}}$

ALTRE DERIVATE

y=tgx $\qquad$ y'= $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$

y=cotgx $\qquad$ y'= $-\frac{1}{\text{sen}^2 x} = -(1 + \cot g^2 x)$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA

y=f(g(x)) $\qquad$ y'=f'(g(x)) g'(x)

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA ESPONENZIALE

y= $f(x)^{g(x)}$ $\qquad$ y'= $f(x)^{g(x)} \cdot \left\{ g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right\}$

DERIVATA LOGARITMICA

y= $\ln|f(x)|$ $\qquad$ y'= $f(x) \cdot D(\ln|f(x)|)$

DERIVATA DI UNA FUNZIONE INVERSA

Sia y=f(x) una funzione invertibile e derivabile in un intervallo I e sia x=F(y) la sua inversa. Nei punti in cui è f'(x) $\neq 0$, la funzione inversa è derivabile e la sua derivata è il reciproco della derivata della funzione data.

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ricaviamo le derivate delle funzioni inverse goniometriche di seno e coseno:

y=arc senx è l'inversa di x=seny, quindi per il teorema precedente

$$D(\text{arcsen}\, x) = \frac{1}{D(\text{sen}\, y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

y=arc cosx è l'inversa di x=cosy, quindi per il teorema precedente

$$D(\arccos x) = \frac{1}{D(\cos y)} = \frac{1}{-\text{sen}\, y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Mentre le derivate delle funzioni inverse di tangente e cotangente sono:

$D(arc\ tgx) = \frac{1}{1 + x^2}$ $\qquad$ $D(arc\, co\, tgx) = -\frac{1}{1 + x^2}$

DEFINIZIONE DI DIFFERENZIALE

Data una funzione f(x) derivabile e continua in un intervallo I, sia x un punto di tale intervallo a cui diamo un incremento h.

Se $\Delta_x \to 0$ *allora* $\Delta_y \to 0$ quindi l'incremento della funzione e l'incremento della variabile sono infinitesimi simultanei che possiamo confrontare attraverso $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y}{\Delta_x} = f'(x)$; si possono presentare i seguenti due casi:

a) se f'(x) $\neq 0$ allora Δ_x *e* Δ_y sono infinitesimi dello stesso ordine

b) se f'(x) =0 allora Δ_y è un infinitesimo di ordine superiore a Δ_x e utilizzando la scrittura

fuori dal limite avremo $\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = f'(x) + \delta(\Delta_x)$ da cui $\Delta_y = f'(x) \cdot \Delta_x + \delta(\Delta_x) \cdot \Delta_x$

posto $dy = df(x) = f'(x) \cdot \Delta_x$ (1) detto DIFFERENZIALE della funzione nel punto x :

Il differenziale di una funzione in un punto in cui la funzione è derivabile è il prodotto della derivata in quel punto per l'incremento della variabile indipendente.

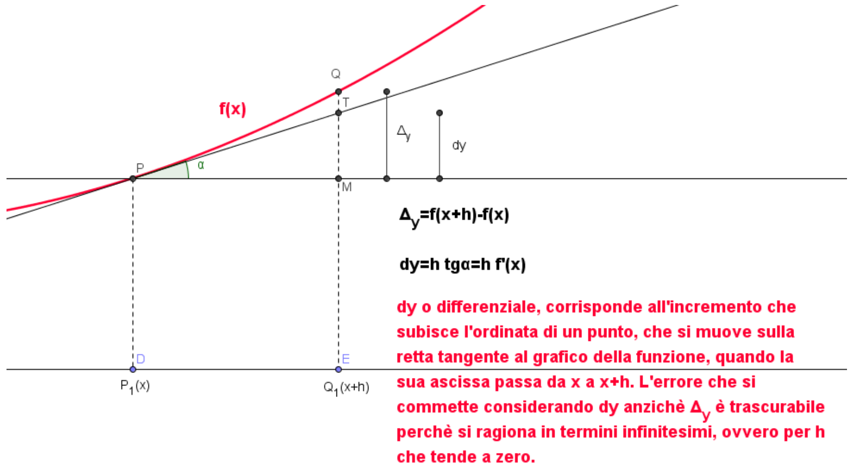
Se y=f(x)=x allora f'(x)=1 quindi possiamo scrivere anche $df(x) = dx = 1 \cdot \Delta_x = \Delta_x$ quindi il differenziale della variabile indipendente coincide con il suo incremento.
Sostituendo i risultati ottenuti nella (1) si ha $dy = f'(x) \cdot dx$:
il differenziale di una funzione è il prodotto della derivata della funzione per il differenziale della variabile indipendente.

Riprendiamo la scrittura fuori dal segno del limite $\Delta_y = f'(x) \cdot \Delta_x + \delta(\Delta_x) \cdot \Delta_x$ che diventa a questo punto $\Delta_y = dy + \delta(\Delta_x) \cdot \Delta_x$ da cui $\Delta_y - dy = \delta(\Delta_x) \cdot \Delta_x$ con $\delta(\Delta_x) \cdot \Delta_x \to 0$ e quindi si può affermare che il differenziale differisce dall'incremento Δ_y per una quantità infinitesima quindi si può tranquillamente scrivere $\Delta_y \cong dy$. Questa è la caratteristica del differenziale, quella di approssimare l'incremento della funzione trascurando infinitesimi di ordine superiore all'incremento della variabile.
Per il differenziale valgono le stesse regole di derivazione fino ad ora studiate.

Procediamo quindi spiegando il :

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL DIFFERENZIALE

Quando il punto Q tende ad avvicinarsi a P per h che tende a zero si ha che il segmento $\overline{QT} = \overline{QM} - \overline{TM}$ è pari a $\delta(\Delta_x) \cdot \Delta_x$ che è un infinitesimo di ordine superiore e che quindi tende molto rapidamente a diventare zero.
Quindi il differenziale può sostituire l'incremento della funzione purché Q sia molto vicino a P.



Dalla relazione $dy = f'(x) \cdot dx$ si ha quindi $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ e si vede che la derivata di funzione si può anche considerare come il rapporto tra il differenziale della funzione e il differenziale della variabile indipendente.

TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI

Teorema di ROLLE

$$\text{Data} \left.\begin{array}{l} \text{f(x) continua in [a, b]} \\ \text{f(x) derivabile in [a, b]} \\ \text{f(a) = f(b)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a;b) : f'(c)=0$$

Dal punto di vista geometrico il teorema di Rolle afferma che se valgono le ipotesi del teorema, esiste almeno un punto interno all'intervallo $[a, b]$ in cui la tangente alla curva è parallela all'asse x.

Teorema di LAGRANGE o del valor medio

$$\text{Data} \left.\begin{array}{l} \text{f(x) continua in [a, b]} \\ \text{f(x) derivabile in (a, b)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a;b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Dal punto di vista geometrico il teorema di Lagrange afferma che se valgono le ipotesi del teorema, esiste almeno un punto interno all'intervallo $[a, b]$ nel quale la retta tangente risulta parallela alla retta di coefficiente angolare $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = f'(c)$ che unisce gli estremi della curva y=f(x).

CONSEGUENZE del Teorema di LAGRANGE o del valor medio:

- se in un intervallo $(a;b)$ una funzione ha sempre derivata nulla allora è costante;
- se due funzioni hanno la stessa derivata in $(a;b)$ allora differiscono per una costante;
- se per una funzione f(x) definita in $(a;b)$ si ha:

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ *è crescente in senso lato in* $(a;b)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ *è crescente in senso stretto o crescente in* $(a;b)$

$f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ *è decrescente in senso lato in* $(a;b)$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ *è decrescente in senso stretto o decrescente in* $(a;b)$

Teorema di CAUCHY

$$\text{Date due funzioni f(x) e g(x)} \left.\begin{array}{l} \text{continue in [a, b]} \\ \text{derivabili in (a, b)} \\ g'(x) \neq 0 \text{ in (a; b)} \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in (a;b) : g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Teorema di DE L'HOPITAL

Siano date due funzioni f(x) e g(x) che supponiamo definite e derivabili in tutti i punti di un intorno I del punto c (finito o infinito), escluso al più c stesso. Supponiamo inoltre che il $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ *sia* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *o* $\left[\frac{0}{0}\right]$ e che g'(x) $\neq 0$ in tutti i punti di I escluso al più x=c.

In tali ipotesi, se esiste finito o infinito il $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

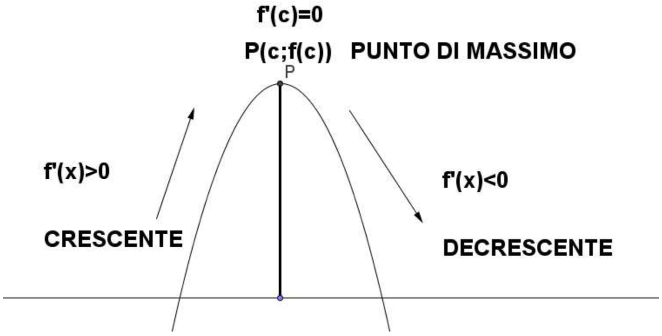
CRITERIO DI SUFFICIENZA PER LA DERIVABILITA' IN UN PUNTO

Data f(x) continua e derivabile in ogni punto di un intorno I di x_0 escluso al più x_0. Se esiste finito per x che tende a x_0 il limite di f'(x), allora la funzione f(x) è derivabile in x_0 e risulta $f'(x_0) = \lim_{x \to c} f'(x)$.

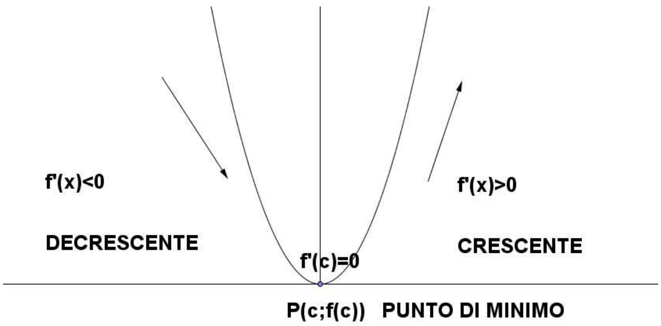
MASSIMI, MINIMI E FLESSI

Data f(x) definita in un intervallo I e sia c un punto di tale intervallo:

Si dice che x=c è un punto di MAX relativo per la funzione f(x) in un certo intorno di c , se succede che per tutti i punti di tale intorno si ha $f(x) \leq f(c)$.



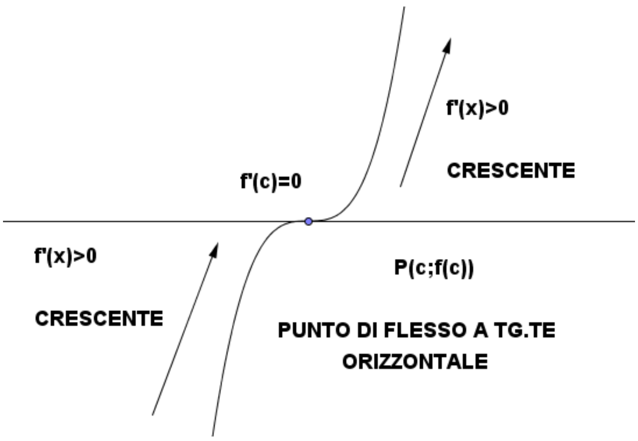
Si dice che x=c è un punto di min relativo per la funzione f(x) in un certo intorno di c , se succede che per tutti i punti di tale intorno si ha $f(x) \geq f(c)$



Si dice che x=c è un punto di Flesso per la funzione f(x) se in tale punto la curva cambia concavità, ovvero:

1) se esiste la retta tangente al grafico della funzione nel punto (c;f(c))
2) se esiste un intorno di c rispetto al quale il diagramma della funzione stia da parti opposte rispetto alla tangente (tangente inflessionale).

Si possono avere flessi a tangente orizzontale (f'(c)=0), a tangente verticale (f'(c)=infinito) ed a tangente obliqua (f'(c) diverso da 0).



TEOREMA SUI MASSIMI E MINIMI RELATIVI

condizione necessaria ma non sufficiente:

Sia y=f(x) una funzione definita in un intervallo I e derivabile nei punti interni ad I. se nel punto c, interno ad I, la funzione ha un massimo o minimo relativo, allora risulta f'(c)=0. cioè c è un punto stazionario.

$f''(x)\rangle 0 \Rightarrow la\ \ funzione\ \ derivata\ \ prima\ \ è\ \ crescente\ \ quindi\ \ \alpha\ \ è\ \ crescente \Rightarrow la\ concavità\ è\ rivolta\ verso\ l'alto$

$f''(x)\rangle 0 \Rightarrow f'(x)\ \ CRESCENTE\ \ \Rightarrow \cup$

$f''(x)\langle 0 \Rightarrow la\ funzione\ derivata\ \ prima\ è\ decrescente\ quindi\ \alpha\ è\ decrescente \Rightarrow la\ concavità\ è\ rivolta\ verso\ il\ basso$

$f''(x) < 0 \Rightarrow f'(x)\ DE\,CRESCENTE\ \ \Rightarrow \cap$

$f''(x) = 0 \Rightarrow la\ funzione\ \ per\ \ x = x_0\ ha\ un\ eventuale\ PUNTO\,DI\ FLESSO\,A\ TANGENTE\,OBLIQUA\ se\ e\ solo\ se\ cambi$
$il\ suo\ segno\ a\ destra\ ed\ a\ sinistra\ di\,x_0\ \ ed\ inoltre\ \ f'(x_0) \neq 0.$

$f''(x) = 0 \Rightarrow f'(x)\ \ CRESCENTE\ (d/s)\ o\ DECRESCENTE\ (d/s)\ \ \Rightarrow \cup\cap\ \ FLESSO\ (a\ \tan gente\ obliqua)$

Caso particolare: se la derivata prima è infinita vuol dire che c'è un flesso a tangente verticale.